数理解析研究所講究録
第 1864 巻 2013 年 213-223

確率的打ち切りを考慮した2人非ゼロ和ゲームにおけるナッシュ均衡戦略の存在について

広島大学大学院工学研究科 齋藤 靖洋 (Yasuhiro Saito) 土肥 正 (Tadashi Dohi)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

本稿では，Teraoka [1] や Baston and Garnaev [2] によって考察されたタイミングの非ゼロ和2人ゲームに関して議論する．文献 [1] では確率的な打ち切りを考慮した形で2人のプレイヤーが参加する射撃競技をモデル化し，そのゲームの解 (ナッシュ均衡戦略と均衡利得) を求めている．導出されたゲームの解となる戦略は，互いのプレイヤーにとって自分の戦略のみを変える動機が存在しない均衡戦略である．しかしながら，そこで求められたナッシュ均衡戦略は一意に定まるものではなかったため，両プレイヤーにとって戦略を選択する自由度が残るものであった．

これに対して Baston and Garnaev [2] は文献 [1] の Silent タイプゲームにおいて，両プレイヤーが同時刻で発砲した場合の期待利得を別の形で定義することで，唯一のナッシュ均衡戦略が存在することを示した．本稿では，Teraoka [1] や Baston and Garnaev [2] によって考察された2つのゲームを統合した一般的なゲームに対して，ナッシュ均衡戦略及び対応する均衡利得を導出する．相手の行動時刻を知ることが出来ない Silent タイプゲーム，及び相手が行動したことを即座に知ることが出来る Noisy タイプゲームに関して，ゲームの解を詳細に議論する．

2 モデルの記述

一発ずつ弾丸の入った銃を持つ2人のプレイヤーが射撃競技に参加するゲームを考える．それぞれをプレイヤー1及びプレイヤー2と呼ぶ．各プレイヤーと的までの距離を1とし，プレイヤーは単位速度で的に近づきながら任意の時刻（すなわち位置）$t \in [0,1]$ において発砲する．先に的に当てたプレイヤーが勝者となり，単位利得を得た上でゲームは終了する．ここで，両プレイヤーが同時に的に当てた場合の利得は各々のゲームにおいて個別に定義する．プレイヤー i $(=1,2)$ が時刻 t で発砲した時の命中確率を精度関数 $A_i(t)$ $(i=1,2)$ で表す．$A_i(t)$ は $A_i(0)=0, A_i(1)=1$ を満たす関数である．更に，この競技は確率分布関数 $H(t)$ に従うランダムな時刻 $T \in [0,1]$ において強制的に打ち切られるものとし，$H(t)$ は $H(0)=0, H(1)=1$ を満たす．$A_i(t)$ 及び $H(t)$ はそれぞれ連続で一階微分可能な単調増加関数とする．各プレイヤーは利得を得る確率を高めるために出来る限り発砲を遅らせたいが，相手が先に命中させる可能性や確率的な時刻 T での打ち切りを考慮しながら射撃時刻を決定しなければならない．時刻 t でまだゲームが打ち切られていない条件の下で，プレイヤー i が先に的に当てる確率は

$$K_i(t) = \{1-H(t)\}A_i(t),\ i=1,2 \tag{1}$$

で表される．本稿では $K_i(t)$ を狭義単峰関数と仮定し，

$$m_i = \{t \geq 0 | \sup_{0<t<1} K_i(t),\ i=1,2\} \tag{2}$$

において唯一の最大値を取る関数とする．

各プレイヤーの発砲時刻を表す純戦略を $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ とし，プレイヤー $i\ (=1,2)$ がそれぞれ時刻 (x,y) で発砲した場合の総期待利得関数を $M_i(x,y)$ で表す．更に，各プレイヤーの純戦略の集合を $(X,Y)\in[0,1]\times[0,1]$ とすれば，プレイヤー i の混合戦略は，それぞれ

$$F_1 = F_1(x) = \Pr\{X \le x\} \in [0,1], \tag{3}$$

$$F_2 = F_2(y) = \Pr\{Y \le y\} \in [0,1] \tag{4}$$

によって表すことが出来る．ここで混合戦略とは，各プレイヤーが式 (3) と式 (4) のような確率分布関数に従って確率的に行動をとる戦略を意味する．相手プレイヤーが混合戦略をとる場合の各プレイヤーの総期待利得は，

$$M_1(x,F_2) = \int_Y M_1(x,y)dF_2, \tag{5}$$

$$M_2(F_1,y) = \int_X M_2(x,y)dF_1 \tag{6}$$

で表され，それぞれのプレイヤーが混合戦略 F_i をとった時の総期待利得関数 $M_i(F_1,F_2)$ は，

$$M_i(F_1,F_2) = \int_X\int_Y M_i(x,y)dF_1dF_2 \tag{7}$$

によって定義される．また，次の不等式を満足するような混合戦略の組 (F_1^*,F_2^*) を Nash 均衡戦略と呼び，対応する総期待利得関数 $M_i(F_1^*,F_2^*)$ を均衡利得と呼ぶ．

$$M_1(F_1^*,F_2^*) \ge M_1(F_1,F_2^*), \tag{8}$$

$$M_2(F_1^*,F_2^*) \ge M_2(F_1^*,F_2). \tag{9}$$

これより問題は式 (8) と式 (9) を同時に満たすナッシュ均衡戦略 (F_1^*,F_2^*) とそれに対応する均衡利得 $M_i(F_1^*,F_2^*)$ $(i=1,2)$ を求めることである．

3 Silent タイプ Teraoka-Baston ゲームにおけるナッシュ均衡戦略

Teraoka [1] によって定式化された Silent タイプの総期待利得関数は次の通りである．

$$M_1(x,y) = \begin{cases} K_1(x), & x \le y, \\ \{1-A_2(y)\}K_1(y), & x > y, \end{cases} \tag{10}$$

$$M_2(x,y) = \begin{cases} K_2(y), & y \le x, \\ \{1-A_1(x)\}K_2(y), & y > x. \end{cases} \tag{11}$$

本稿では式 (10) と式 (11) で与えられる総期待利得関数を持つゲームのことを Silent タイプ Teraoka ゲームと呼ぶ．Silent タイプゲームでは，プレイヤーがすでに発砲したかどうかを相手側のプレイヤーは知ることが出来ない．これに対して，Baston and Garnaev [2] は次のような若干異なる総期待利得関数を定義した．

$$M_1(x,y) = \begin{cases} K_1(x), & x < y, \\ P_1(x), & x = y, \\ \{1-A_2(y)\}K_1(x), & x > y, \end{cases} \tag{12}$$

$$M_2(x,y) = \begin{cases} K_2(y), & y < x, \\ P_2(y), & y = x, \\ \{1-A_1(x)\}K_2(y), & y > x. \end{cases} \tag{13}$$

ここで，$P_i(t)$ $(i=1,2)$ は $0 \leq P_i(t) < K_i(t)$ を満たす関数である．本稿では式 (12) と式 (13) で与えられる総期待利得関数を持つゲームのことを Silent タイプ Baston ゲームと呼ぶ．Silent タイプ Baston ゲームは Silent タイプ Teraoka ゲームと比べ，両プレイヤーが同時に発砲した場合に得られる利得が減少する．Baston and Garnaev [2] は，Silent タイプ Baston ゲームが唯一のナッシュ均衡戦略を持つことを示している．

ここでは式 (12) と式 (13) における $P_i(t)$ を $0 \leq P_i(t) \leq K_i(t)$ と定義し，Teraoka ゲームと Baston ゲームを含む一般的なゲームに関してナッシュ均衡戦略を導出する．この場合，$0 \leq P_i(t) < K_i(t)$ の時に Silent タイプ Baston ゲーム，$P_i(t) = K_i(t)$ の時に Silent タイプ Teraoka ゲームとそれぞれ一致する．本稿では上述の両ゲームを含む一般化されたゲームを Silent タイプ Teraoka-Baston ゲームと呼ぶ．更に以降の 5 節では，$P_i(t) > K_i(t)$ である場合のゲームについても考察を行う．

式 (5) と式 (6) に対して，一階の最適性条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_1(x, F_2^*) &= 0, \qquad (14) \\ \frac{\partial}{\partial y} M_2(F_1^*, y) &= 0 \qquad (15) \end{aligned}$$

のように与えられ，式 (14) と式 (15) を満たす混合戦略 F_i^* $(i=1,2)$ の一階微分 $f_i^*(t) = dF_i^*(t)/dt$ が存在すると仮定する．$m = \min(m_1, m_2)$ と $F_i^*(a) = 0$ を満たす任意の $a \in [0, m]$ に対し，式 (14) と式 (15) を満足する $f_i(t)$ $(t \in [0,1], i = 1,2)$ は

$$f_i(t) = \frac{K_{3-i}(a) K'_{3-i}(t)}{\{K_{3-i}(t)\}^2 A_i(t)} \qquad (16)$$

によって与えられる．ここで，$K'_{3-i}(t) = dK_{3-i}(t)/dt$ である．また，式 (16) に対して，

$$\int_a^m f_i(t) dt = 1 \qquad (17)$$

を満たす唯一の a を a_i とする．

補題 3.1 [2]:

$$\lambda(a) = K_1(m_1)\left[\frac{K_1(a)}{K_1(m_2)} - A_2(m_2)\left(1 - \int_a^{m_2} f_2(t) dt\right)\right] - K_1(a) \qquad (18)$$

とおけば，$\lambda(a)$ は $0 \leq a \leq m_2$ の範囲で単調減少関数である．更に，$\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \leq K_1(m_2)$ が成り立つ条件の下で，$\lambda(a^*) = 0$ となる唯一の a^* が存在する．

補題 3.2 [1]: Silnet タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて，一階の最適性条件を満たす混合戦略の一階微分は式 (16) の

$$f_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ f_i(t), & a \leq t < m, \\ 0, & m \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (19)$$

によって与えられる．

定理 3.1: $m = m_2$ とおく．Silnet タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて，$\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \geq K_1(m_2)$ が成り立つ場合，各プレイヤーのナッシュ均衡戦略は

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < m_i, \\ 1, & m_i \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (20)$$

となる．この時、各プレイヤーの均衡利得は

$$\begin{aligned} M_1(F_1^*, F_2^*) &= \{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1), & (21)\\ M_2(F_1^*, F_2^*) &= K_2(m_2) & (22) \end{aligned}$$

である．

定理 3.1 で示した解が式 (8) と式 (9) を満たすことは自明であるため、証明は省略する．

定理 3.2: $m = m_2$ とおく．Silnet タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて，$\{1-A_2(m_2)\}K_1(m_1) < K_1(m_2)$ が成り立つ場合，各プレイヤーについてのナッシュ均衡戦略は

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a, \\ \int_a^t f_i^*(t)dt, & a \le t < m, \\ \int_a^m f_i^*(t)dt + \alpha_i I(z), & m \le t \le m_i, \\ 1, & m < t \le 1 \end{cases} \tag{23}$$

となる．ここで，$a = \max(a^*, a_1)$ であり，α_i $(i = 1, 2)$ はマスパート

$$\alpha_i = 1 - \int_a^m f_i^*(t)dt, \tag{24}$$

$I_i(z)$ は定義関数

$$I_i(z) = \begin{cases} 1, & z = m_i, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{25}$$

である．この時、各プレイヤーの均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(a),\ i = 1, 2 \tag{26}$$

となる．

証明: プレイヤー 1 について次の 4 つの場合を考える．(i) $0 \le x < a$, (ii) $a \le x < m$, (iii) $x = m$, (iv) $m < x \le 1$. (i) の場合, 式 (5) と式 (12) から,

$$M_1(x, F_2^*) = K_1(x) < K_1(a) \tag{27}$$

が成り立つ．(ii) の場合,

$$M_1(x, F_2^*) = \int_a^x \{1 - A_2(y)\}K_1(x)dF_2^* + \int_x^{m-0} K_1(x)dF_2^* + K_1(x)\alpha_2 \tag{28}$$

である．f_2^* が一階の最適性条件を満たしていることから，$a \le x < m$ において $M_1(x, F_2^*)$ は一定であり，式 (28) に $x = a$ を代入すると，

$$M_1(a, F_2^*) = K_1(a)\left(\int_a^{m-0} dF_2^* + \alpha_2\right) = K_1(a) \tag{29}$$

となる．(iii) の場合, 式 (23) より,

$$\begin{aligned} M_1(m, F_2^*) &= \int_a^{m-0} \{1 - A_2(y)\}K_1(m)dF_2^* + P_1(m)\alpha_2 \\ &= K_1(a) - \{K_1(m) - P_1(m)\}\alpha_2 \le K_1(a) & (30) \end{aligned}$$

が成り立つ．(iv) の場合，

$$\begin{aligned} M_1(x, F_2^*) &= \int_a^{m-0} \{1 - A_2(y)\} K_1(x) dF_2^* + \{1 - A_2(m)\} K_1(x) \alpha_2 \\ &= K_1(x) \left\{ \frac{K_1(a)}{K_1(m)} - A_2(m)\alpha_2 \right\} \end{aligned} \tag{31}$$

となる．関数 $K_1(x)$ の性質から，式 (31) は $x = m_1$ において最大値を取り，

$$M_1(m_1, F_2^*) = K_1(m_1) \left\{ \frac{K_1(a)}{K_1(m)} - A_2(m)\alpha_2 \right\} \tag{32}$$

である．ここで，式 (32) が $K_1(a)$ 以下となることを示す．$a = a^*$ の場合，補題 4.1 より

$$M_1(m_1, F_2^*) = K_1(m_1) \left\{ \frac{K_1(a^*)}{K_1(m)} - A_2(m)\alpha_2 \right\} = K_1(a^*) \tag{33}$$

が成り立つ．また，$a = a_1$ の場合，補題 4.1 より $\lambda(a_1) < 0$ となり，

$$M_1(m_1, F_2^*) = K_1(m_1) \left\{ \frac{K_1(a_1)}{K_1(m)} - A_2(m)\alpha_2 \right\} < K_1(a_1) \tag{34}$$

が成り立つ．以上のことから，全ての x について，

$$M_1(x, F_2^*) \leq K_1(a) \tag{35}$$

である．更に，各々の場合の均衡利得を計算すると，$a = a^*$ の場合，

$$M_1(F_1^*, F_2^*) = \int_{a^*}^{m-0} K_1(a^*) dF_1^* + K_1(a^*)\alpha_1 = K_1(a^*) \tag{36}$$

となり，$a = a_1$ の場合，式 (17) と式 (24) より $\alpha_1 = 0$ なので，

$$M_1(F_1^*, F_2^*) = \int_{a_1}^{m-0} K_1(a_1) dF_1^* = K_1(a_1) \tag{37}$$

を得る．プレイヤー 2 についても同様である． □

命題 3.1: Silnet タイプ Teraoka-Baston ゲームは唯一のナッシュ均衡戦略を持つ．

実際，定理 3.1 及び定理 3.2 で紹介した解は Silent タイプ Baston ゲームの解と一致する．また，Silent タイプ Baston ゲームの解は唯一のナッシュ均衡戦略となっているので、命題 3.1 が成り立つことは明らかである．

4 Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームにおけるナッシュ均衡戦略

次に Noisy タイプゲームについて考察する．Teraoka [1] によって定式化された Noisy タイプの総期待利得関数は次の通りである．

$$M_1(x, y) = \begin{cases} K_1(x), & x \leq y, \\ \{1 - A_2(y)\} K_1(r(y)), & x > y, \end{cases} \tag{38}$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} K_2(y), & y \leq x, \\ \{1 - A_1(x)\} K_2(r(x)), & y > x. \end{cases} \tag{39}$$

4 節と同様に，式 (38) と式 (39) の総期待利得関数を持つゲームのことを Noisy タイプ Teraoka ゲームと呼ぶ．Noisy タイプゲームでは，相手が発砲した場合に各プレイヤーは即座にその事実を知ることが出来るため，相手より後に行動するプレイヤーは最も都合の良い時刻 $r(t)$ で発砲出来る．Baston and Garnaev [2] では Silent タイプゲームのみが考察されていたため，Noisy タイプ Baston ゲームはこれまでに考えられることはなかった．本稿では，Silent タイプゲームと同様の観点から，次のような総期待利得関数を定義する．

$$M_1(x,y) = \begin{cases} K_1(x), & x < y, \\ P_1(x), & x = y, \\ \{1 - A_2(y)\}K_1(r(y)), & x > y, \end{cases} \tag{40}$$

$$M_2(x,y) = \begin{cases} K_2(y), & y < x, \\ P_2(y), & y = x, \\ \{1 - A_1(x)\}K_2(r(x)), & y > x. \end{cases} \tag{41}$$

Silent タイプゲームの場合と同様に，$P_i(t)$ $(i = 1,2)$ は $0 \leq P_i(t) \leq K_i(t)$ を満たすものとし，式 (40) と式 (41) の総期待利得を持つゲームを Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームと呼ぶ．5 節では更に $P_i(t) > K_i(t)$ の場合についても考察する．

今，

$$K_i(b_i) = \{1 - A_{3-i}(b_i)\}K_i(m_i), \quad i = 1,2 \tag{42}$$

を満たすパラメータを b_i とし，$t \in (b_i, 1]$ に対して，

$$\theta_{3-i}(t) = \frac{K_i'(t)}{K_i(t) - \{1 - A_{3-i}(t)\}K_i(m_i)} \tag{43}$$

を定義する．

補題 4.1: Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて，一階の最適性条件を満たす戦略 $F_i^*(t)$ $(i = 1,2)$ は次のように与えられる．

$$F_i^*(t) = 1 - \exp\left\{-\int_b^t \theta_i(t)dt\right\}, \quad b \leq t < c. \tag{44}$$

ここで，$b = \max(b_1, b_2)$ であり，c は $b < c \leq m$ を満たす任意の実数である．

証明: プレイヤー 1 について考える．プレイヤー 1 が $b \leq x \leq c$ で発砲した場合の総期待利得は

$$M_1(x, F_2^*) = \int_b^x \{1 - A_2(y)\}K_1(m_1)dF_2^* + \int_x^c K_1(x)dF_2^* \tag{45}$$

であるので，一階の最適性条件から，

$$\frac{1}{1 - F_2^*(x)} \cdot \frac{\partial F_2^*(x)}{\partial x} = \frac{\partial K_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{K_1(x) - \{1 - A_2(x)\}K_1(m_1)} = \theta_2(x) \tag{46}$$

を得る．両辺を x について積分すると，最終的に

$$F_2^*(t) = 1 - d\exp\left\{-\int_b^t \theta_2(t)dt\right\} \tag{47}$$

が得られる．ここで d は積分定数であり，$t = b$ から $d = 1$ を得る．プレイヤー 2 についても同様である．□

補題 4.2 [1]: 任意の $c \in (b_i, m)$ に対して

$$\int_a^c \theta_{3-i}(t)dt \to \infty, \ as\ a \to b_i \tag{48}$$

が成り立つ.

定理 4.1: $m = m_2$ とおく. Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて, $b \geq m$ が成り立つ場合, 各プレイヤーのナッシュ均衡戦略は

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < m_i, \\ 1, & m_i \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{49}$$

によって与えられる. この時、各プレイヤーの均衡利得は

$$M_1(F_1^*, F_2^*) = \{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1), \tag{50}$$
$$M_2(F_1^*, F_2^*) = K_2(m_2) \tag{51}$$

となる.

定理 4.1 で示した解が式 (8) と式 (9) を満たすことは自明であるため、証明は省略する.

定理 4.2: $b = b_2$ とおく. Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて, $b < m$ が成り立つ場合, 各プレイヤーのナッシュ均衡戦略は

$$F_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < b, \\ 1, & b \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{52}$$

$$F_2^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < b, \\ 1 - \exp\{-\int_b^y \theta_2(t)dt\} + \alpha_2 J(y), & b \leq y \leq c, \\ 1, & c < y \leq 1 \end{cases} \tag{53}$$

となる. ここで, $c \leq m$ であり, マスパート α_2 は

$$\alpha_2 = \exp\left\{-\int_b^c \theta_2(t)dt\right\} \tag{54}$$

によって与えられ, $J(z)$ は定義関数

$$J(z) = \begin{cases} 1, & z = c, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{55}$$

である. この時、各プレイヤーの均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(b), \ i = 1, 2 \tag{56}$$

となる.

証明: プレイヤー 2 がナッシュ均衡戦略を取った場合のプレイヤー 1 の総期待利得を算出すると,

$$M_1(x, F_2^*) = \begin{cases} K_1(x), & 0 \leq x < b, \\ K_1(b), & b \leq x < c, \\ K_1(b) - \{K_1(c) - P_1(c)\}\alpha_2, & x = c, \\ K_1(b) - [K_1(c) - \{1 - A_2(c)\}K_1(m_1)]\alpha_2, & c \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{57}$$

となる. 同様に, プレイヤー 1 がナッシュ均衡戦略を取った場合のプレイヤー 2 の総期待利得を算出すると,

$$M_2(F_1^*, y) = \begin{cases} K_2(y), & 0 \leq y < b, \\ P_2(b), & y = b, \\ \{1 - A_1(b)\}K_2(m_2) = K_2(b), & b < y \leq c \\ K_2(b) & c < y \leq 1 \end{cases} \tag{58}$$

となる．従って，全ての (x, y) について，

$$M_1(x, F_2^*) \leq K_1(b), \tag{59}$$

$$M_2(F_1^*, y) \leq K_2(b) \tag{60}$$

が成り立つ．よって，均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(b) \tag{61}$$

となる． □

定理 4.3: $b = b_2$ かつ $m = m_1$ とおく．Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームにおいて，$b < m$ が成り立つ場合，次に示す戦略の組もまたナッシュ均衡戦略となる．

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < b, \\ 1, & b \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{62}$$

$$F_2^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < b, \\ 1 - \exp\{-\int_b^y \theta_2(t)dt\}, & b \leq y < m, \\ 1 - \exp\{-\int_b^m \theta_2(t)dt\} + \alpha_2 I(y), & m \leq y < c, \\ 1, & c \leq y \leq 1. \end{cases} \tag{63}$$

ここで，$c > m$ である．この時、各プレイヤーの均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(b),\ i = 1, 2 \tag{64}$$

となる．

証明:プレイヤー 1 の総期待利得は，

$$M_1(x, F_2^*) = \begin{cases} K_1(x), & 0 \leq x < b, \\ K_1(b), & b \leq x \leq m, \\ K_1(b) - \{K_1(m_1) - K_1(x)\}\alpha_2, & m < x < c, \\ K_1(b) - \{K_1(m_1) - P_1(c)\}\alpha_2, & x = c, \\ K_1(b) - [K_1(m_1) - \{1 - A_2(c)\}K_1(c)]\alpha_2, & c < x \leq 1 \end{cases} \tag{65}$$

となり，プレイヤー 2 の総期待利得は，

$$M_2(F_1^*, y) = \begin{cases} K_2(y), & 0 \leq y < b, \\ P_2(b), & y = b, \\ \{1 - A_1(b)\}K_2(m_2) = K_2(b), & b < y < m \\ K_2(b) & m \leq y < c, \\ K_2(b) & c \leq y \leq 1 \end{cases} \tag{66}$$

となる．以上より，全ての (x, y) について，

$$M_1(x, F_2^*) \leq K_1(b), \tag{67}$$

$$M_2(F_1^*, y) \leq K_2(b) \tag{68}$$

が成り立ち，均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(b) \tag{69}$$

となる. □

定理 4.1 で示した解における条件 $b \geq m$ は定理 3.1 で示した条件 $\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \geq K_1(m_2)$ と同じ意味を持ち，２つの定理の解はゲームのタイプに関係なく成り立つナッシュ均衡戦略である．Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームでは，Silent タイプ Teraoka-Baston ゲームの定理 3.2 のような混合戦略の組ではなく，定理 4.2 及び 4.3 で示した様に片方のプレイヤーが純戦略を取り，もう一方のプレイヤーが混合戦略を取る形のナッシュ均衡戦略が存在する．また、Noisy タイプ Teraoka-Baston ゲームの解は Silent タイプ Teraoka-Baston ゲームの解と異なり，唯一の解ではないことも確認できる．

5 ボーナスゲームにおけるナッシュ均衡戦略

3 節及び 4 節で示したナッシュ均衡戦略は全て $0 \leq P_i(t) \leq K_i(t)$ を仮定したゲームの解であった．ここでは式 (12) と (13) 及び式 (40) と (41) の総期待利得関数に対し，$P_i(t) \geq K_i(t)$ となる場合のゲームのナッシュ均衡戦略について考察する．前者を Silent タイプボーナスゲーム，後者を Noisy タイプボーナスゲームと呼ぶ．定理 5.1 及び定理 5.2 に示す戦略は，ゲームのタイプに関係なく成り立つナッシュ均衡戦略である．$P_i(t)$ は $K_i(t)$ と同様に m_i で最大値を取る狭義単峰関数と想定する．更に，次のような記号を定義する．

$$\gamma_i = \inf\{t : K_i(m_i) = P_i(t)\}, \tag{70}$$

$$\delta_i = \sup\{t : K_i(m_i) = P_i(t)\}. \tag{71}$$

更に $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$ 及び $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とする．

定理 5.1: $m = m_2$ とおく．ボーナスゲームにおいて $b \geq m$ が成り立つ場合，ナッシュ均衡戦略は次の通りである．

(i) $\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \geq P_1(m_2)$ かつ $K_2(m_2) \geq P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < m_i, \\ 1, & m_i \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{72}$$

となり，ゲームの均衡利得は

$$\begin{aligned} M_1(F_1^*, F_2^*) &= \{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1), & (73)\\ M_2(F_1^*, F_2^*) &= K_2(m_2) & (74) \end{aligned}$$

によって与えられる．

(ii) $\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \geq P_1(m_2)$ かつ $K_2(m_2) < P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < m_1, \\ 1, & m_1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{75}$$

となり，ゲームの均衡利得は

$$M_i(m_1, m_1) = P_i(m_1), \; i = 1, 2 \tag{76}$$

によって与えられる．

(iii) $\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) < P_1(m_2)$ かつ $K_2(m_2) \geq P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < m_2, \\ 1, & m_2 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{77}$$

となり，ゲームの均衡利得は

$$M_i(m_2, m_2) \quad = \quad P_i(m_2),\ i = 1, 2 \tag{78}$$

によって与えられる.
(iv) $\{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) < P_1(m_2)$ かつ $K_2(m_2) < P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < m_1, \\ 1, & m_1 \le t \le 1, \end{cases} \tag{79}$$

または,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < m_2, \\ 1, & m_2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{80}$$

となり，ゲームの均衡利得は

$$M_i(m_1, m_1) \quad = \quad P_i(m_1),\ i = 1, 2, \tag{81}$$

または,

$$M_i(m_2, m_2) \quad = \quad P_i(m_2),\ i = 1, 2 \tag{82}$$

によって与えられる.

定理 5.2: $m = m_2$ とおく．ボーナスゲームにおいて $b < m$ が成り立つ場合，ナッシュ均衡戦略は次の通りである.
(i) $K_2(m_2) \ge P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < m_2, \\ 1, & m_2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{83}$$

であり，ゲームの均衡利得は

$$M_i(m_2, m_2) \quad = \quad P_i(m_2),\ i = 1, 2 \tag{84}$$

となる.
(ii) $K_2(m_2) < P_2(m_1)$ の時,

$$F_i^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t^*, \\ 1, & t^* \le t \le 1 \end{cases} \tag{85}$$

である．ここで t^* は $\gamma \le t^* \le \delta$ を満たす任意の時刻である. この場合，各プレイヤーの均衡利得は

$$M_i(t^*, t^*) \quad = \quad P_i(t^*),\ i = 1, 2 \tag{86}$$

となる.

定理 5.3: $m = m_1 = m_2$ かつ $a = a_1 = a_2$ とおく．Silent タイプボーナスゲームにおいて $a < m$ が成り立つ場合，次に示す混合戦略の組もまたナッシュ均衡戦略となる.

$$F_1^*(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & 0 \le x < a, \\ \int_b^x f_1^*(t)dt, & a \le x \le m, \\ 1, & m < x \le 1, \end{cases} \tag{87}$$

$$F_2^*(y) \quad = \quad \begin{cases} 0, & 0 \le y < a, \\ \int_b^y f_2^*(t)dt, & a \le y \le m, \\ 1, & m < y \le 1. \end{cases} \tag{88}$$

ここで，

$$f_i^*(t) = \frac{K_{3-i}(a)K'_{3-i}(t)}{\{K_{3-i}(t)\}^2 A_i(t)}, \ i = 1, 2 \tag{89}$$

であり，各プレイヤーの均衡利得は

$$M_i(F_1^*, F_2^*) = K_i(b), \ i = 1, 2 \tag{90}$$

となる．

定理 5.1, 定理 5.2, 定理 5.3 で与えられる解が式 (8) と式 (9) を満たすことは明らかであるため，ここでは証明を省略する．ボーナスゲームでは両プレイヤーが同時に発砲した場合に得られる利得がボーナスとして増加するため，両プレイヤーが同時刻で確定的に行動を起こす純戦略の組み合わせが解となる傾向が強い．特徴的な解を挙げれば，定理 5.1 の (iv) では式 (79) と式 (80) のいずれの戦略もナッシュ均衡戦略となる．また，定理 5.2 の (ii) では両プレイヤーが $\gamma \le t^* \le \delta$ を満たす任意の時刻 t^* で同時に発砲する戦略が全てナッシュ均衡戦略であり、これは明らかに無数の戦略が存在することを示している．更に，定理 5.3 では，Silent タイプゲームにおいて混合戦略の組の中でナッシュ均衡戦略となるものが存在するが，この解は両プレイヤーの行動時刻を定めるパラメータ a_i 同士及び m_i 同士が等しいという，非常に限られた条件下でのみ成り立つ均衡戦略となっていることに注意する．

6 まとめと今後の展望

本稿では，参考文献 [1] と [2] で考察されたタイミングの二人非ゼロ和ゲームを統合し，拡張したゲームに対するナッシュ均衡戦略を導出した．今後の課題としては，より多人数のプレイヤーが参加するゲームに対して，同様の観点の下で考察を行っていく予定である．

参考文献

[1] Y. Teraoka, A Two-Person Game of Timing with Random Termination, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 40, pp. 379-396, 1983.

[2] V. J. Baston, and A. Y. Garnaev, Teraoka-Type Two-Person Nonzero-Sum Silent Duel, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 87, No. 3, pp. 539-552, 1995.